Terminale Spécialité
Récurrence et dénombrement.

Ex 01.1

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \mid 4^n - 1$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $3 \mid 4^n - 1$

Initialisation : Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

et $0 = 3 \times 0$, donc $3 \mid 0$, P_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq P_n vrai.

$\exists k \in \mathbb{Z}$: $4^n - 1 = 3k$

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 4^n - 4 + 3 \\ &= 4(4^n - 1) + 3 \\ &\overset{H.R.}{=} 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k + 1) \end{aligned}$$

Donc $3 \mid 4^{n+1} - 1$, et P_{n+1} vrai.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) vrai.

Ex 01.2

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & 4n > 2(n+1) \\ \Leftrightarrow\ & 4n > 2n + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 4n - 2n > 2 \\ \Leftrightarrow\ & 2n > 2 \\ \Leftrightarrow\ & n > 1 \end{aligned}$$

$S = \{2; 3; 4; \dots\} = \mathbb{N} - \{0; 1\}$.

2°) Mq $\forall n \geq 3$, $2^n > 2n$ (P_n).

Initialisation : Pour $n = 3$, $2^3 = 8$ et $2 \times 3 = 6$,

or $8 > 6$, donc (P_3) vrai.

Hérédité : Soit $n \geq 3$ tq P_n vraie.

$$2^n > 2n$$
$$2 \times 2^n > 2 \times 2n$$
} on multiplie par 2 membre à membre

$$2^{n+1} > 4n \underset{1^\circ}{>} 2(n+1)$$

Donc $2^{n+1} > 2(n+1)$, P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 3$, $2^n > 2n$.

Ex 01.3 Il n'y a aucune paire de droites parallèles, ni aucunes droites concourantes.

1°) Lorsque $n = 2$, comme les droites ne peuvent pas être parallèles, il y a $\underline{1}$ point d'intersection.

Lorsque $n = 3$, comme elles ne sont ni parallèles ni concourantes, les droites ont $\underline{3}$ points d'intersection.

Lorsque $n = 4$, comme il n'y a ni parallèles ni droite concourante, la 4° droite coupe les trois premières en trois points distincts, donc il y a $3 + 3 = \underline{6}$ points d'intersection.

2°) Soit $n \geq 1$ (au moins une droite).
Si u_n est le nombre de points d'intersection entre n droites, lorsque l'on ajoute une droite, elle coupera ces n droites en n points distincts (ni parallèles, ni concourantes).
Donc $u_{n+1} = u_n + n$.

3°) Mq $\forall n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (P_n)

Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = 0$
et $\dfrac{1 \times (1-1)}{2} = \dfrac{1 \times 0}{2} = 0$, donc (P_1) vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tq (P_n) vrai.

On a vu au 2° que

$u_{n+1} = u_n + n$

donc $u_{n+1} \overset{H.R.}{=} \dfrac{n(n-1)}{2} + n$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n + 2n}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\big((n+1)-1\big)}{2}$$

Donc (P_{n+1}) vrai.

Conclusion : $\forall n \geq 1$, (P_n) vraie.

Q 01.4.

1°) L'ensemble $E = \{-3 ; 1 ; 5\}$ est de cardinal $\#E = 3$, donc on verra au §3Ac que $\#P(E) = 2^3 = 8$ (Pté 1.6). En attendant, on peut les lister et les compter.

2°) Attention à ne pas oublier les sous-ensembles triviaux, soient $\emptyset$ et E.

$P(E) = \{ \underbrace{\emptyset}_{0} ; \{-3\} ; \{1\} ; \{5\} ; \underbrace{\{-3 ; 1\}}_{-2 \text{ (2pos)}} ; \underbrace{\{-3 ; 5\}}_{+2 \text{ (2pos)}} ;$

$\underbrace{\{1 ; 5\}}_{6 \text{ (2pos)}} ; \underbrace{E}_{3} \}$, on a bien $\#P(E) = 8$.

→ (6 pos) $\{-3;1;5\} / \{-3;5;1\} / \{1;-3;5\} / \{1;5;-3\} \ldots$

3°)

	Gain \ Proba	−3	−2	0	1	2	3	5	6	Espérance
équiproba ss tenir cpte de l'ordre →		1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1,5
équiproba en tenant cpte de l'ordre →	ou	1/16	2/16	1/16	1/16	2/16	6/16	1/16	2/16	2,0625

(Le casino va faire faillite).

Ex 01.5

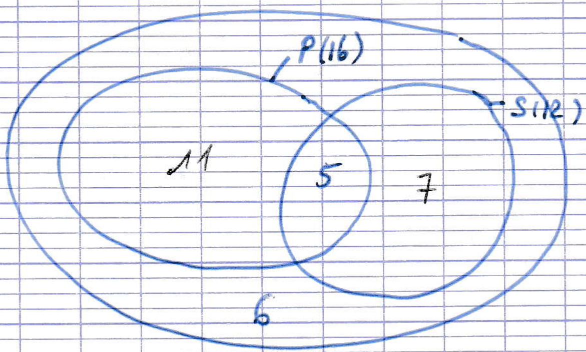
1°) On note P l'ensemble des sportifs pratiquant le SUP, et S celui des sportifs pratiquant le surf.

P \ S	Oui	Non	Total
Oui	5	11	16
Non	7	6	13
Total	12	17	29

— calculé

— énoncé

Le nombre total de personnes est 29.



Le nombre total de personnes est $11+5+7+6 = 29$.

2°) Exemple : | 1 | 8 | T | K | % | → 6 choix possibles

10 choix possibles

10 choix possibles

26 choix possibles

26 choix possibles

Donc le nombre total de choix possibles est (faire un arbre) : $10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 6 = 405\,600$.

Ex 01.6

1°) Dans le mot « deux », toutes les lettres sont différentes : on cherche les permutations de l'ensemble $\{d ; e ; u ; x\}$ à 4 éléments. D'après la propriété 1.9, il y en a $\underline{4! = 24}$.

2°) Dans le mot « facteurs », de la même manière, on a $\underline{8! = 40320}$ permutations.

3°) En revanche, dans « factorielle »,
le e est répété, ainsi que le l.
Donc si l'on compte 11! permutations,
les mots factorielle
factorielle
factorielle
factorielle
seront comptés comme des mots différents.
Et de la même manière, chacune des anagrammes sera comptée 4 fois.
Il y a donc "seulement" $\frac{11!}{4} = 9\,979\,200$ anagrammes de ce mot.

Ga 01.7

1°) Il s'agit de prendre 5 cartes parmi 52, sans tenir compte de l'ordre.
C'est un sous-ensemble à 5 éléments d'un ensemble à 52 éléments. Il s'agit donc d'une 5-combinaison.
Il y en a donc

$$\binom{52}{5} = C_{52}^{5} = \frac{52!}{5!\,(52-5)!} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2\,598\,960$$

2°) Parmi ces mains, si l'on ne prend que celles contenant l'as de Pique, on a "fixé" l'une des cartes.
Il ne reste donc plus que 4 cartes, à choisir parmi 51 (il n'y a plus l'as de Pique).
C'est une 4-combinaison d'un ensemble à 51 éléments.

$$\binom{51}{4} = C_{51}^{4} = 249\,900.$$

évidemment !

N.B. : On a donc $\frac{249\,900}{2\,598\,960} = \frac{5}{52} \simeq 0{,}09615$
soit environ 9,62% de chances d'avoir l'as de Pique.

Q 01.8

1°) La somme des nombres, est indépendante de l'ordre des termes, il s'agit donc de sous-ensembles à 3 éléments (combinaisons) et non de 3-listes (arrangements).

On peut donc obtenir $\binom{6}{3} = C_6^3 = 20$ sommes différentes au maximum

Mais attention ! Les tirages $\{1, 3, 9\}$ et $\{8, 3, 2\}$ donnent la même somme : 13.

Écrivons donc les 20 tirages possibles et leur somme :

$\{1, 2, 3\} \to 6$
$\{1, 2, 6\} \to 9$
$\{1, 2, 8\} \to 11$
$\{1, 2, 9\} \to 12$
$\{1, 3, 6\} \to 10$
$\{1, 3, 8\} \to 12$
$\{1, 3, 9\} \to 13$
$\{1, 6, 8\} \to 15$
$\{1, 6, 9\} \to 16$
$\{1, 8, 9\} \to 18$
$\{2, 3, 6\} \to 11$
$\{2, 3, 8\} \to 13$
$\{2, 3, 9\} \to 14$
$\{2, 6, 8\} \to 16$
$\{2, 6, 9\} \to 17$
$\{2, 8, 9\} \to 19$
$\{3, 6, 8\} \to 17$
$\{3, 6, 9\} \to 18$
$\{3, 8, 9\} \to 20$
$\{6, 8, 9\} \to 23$

Il y a donc $20 - 6 = \underline{14}$ sommes distinctes.

2°) Dressons la liste des multiples de 4 que l'on peut écrire avec 2 chiffres distincts pris parmi les plaquettes :

12 , 32 , 92 , 16 , 36 , 96 , 28 , 68 .

Si on note abc le nombre obtenu, on a donc 8 choix pour la suite bc.

Pour chacun de ces 8 choix, on choisit a parmi les 4 plaquettes restantes (on a enlevé b et c), il y a donc 4 façons de choisir a.

On obtient donc en tout $8 \times 4 = \underline{32}$ nombres divisibles par 4.

<u>Ea 01.9</u>

1°) Il s'agit d'une permutation des 9 cartes (dont aucunes ne sont semblables), il y a donc $\underline{9!} = 362\,880$ possibilités

2°) Cette fois-ci, il y a 3 fois la lettre E, donc par exemple, si on prend seulement en compte les permutations, le mot

THEVEONBE
THEVEONBE
THEVEONBE
THEVEONBE
THEVEONBE
THEVEONBE

comptera $3! = 6$ fois
(3! car ce sont des permutations des $\underline{3}$ lettres E).

De la même manière, chaque mot comptera 6 fois.
Il y a donc "seulement"

$$\frac{9!}{6} = 60\,480 \text{ possibilités.}$$

3°) Avec les lettres ESCTARESD,

on a deux fois E et deux fois S,

donc chaque mot est compté $\underbrace{2!}_{\text{permutation des E}} \times \underbrace{2!}_{\text{permutation des S}} = 4$ fois.

On a donc en tout $\frac{9!}{4} = 90720$ possibilités.